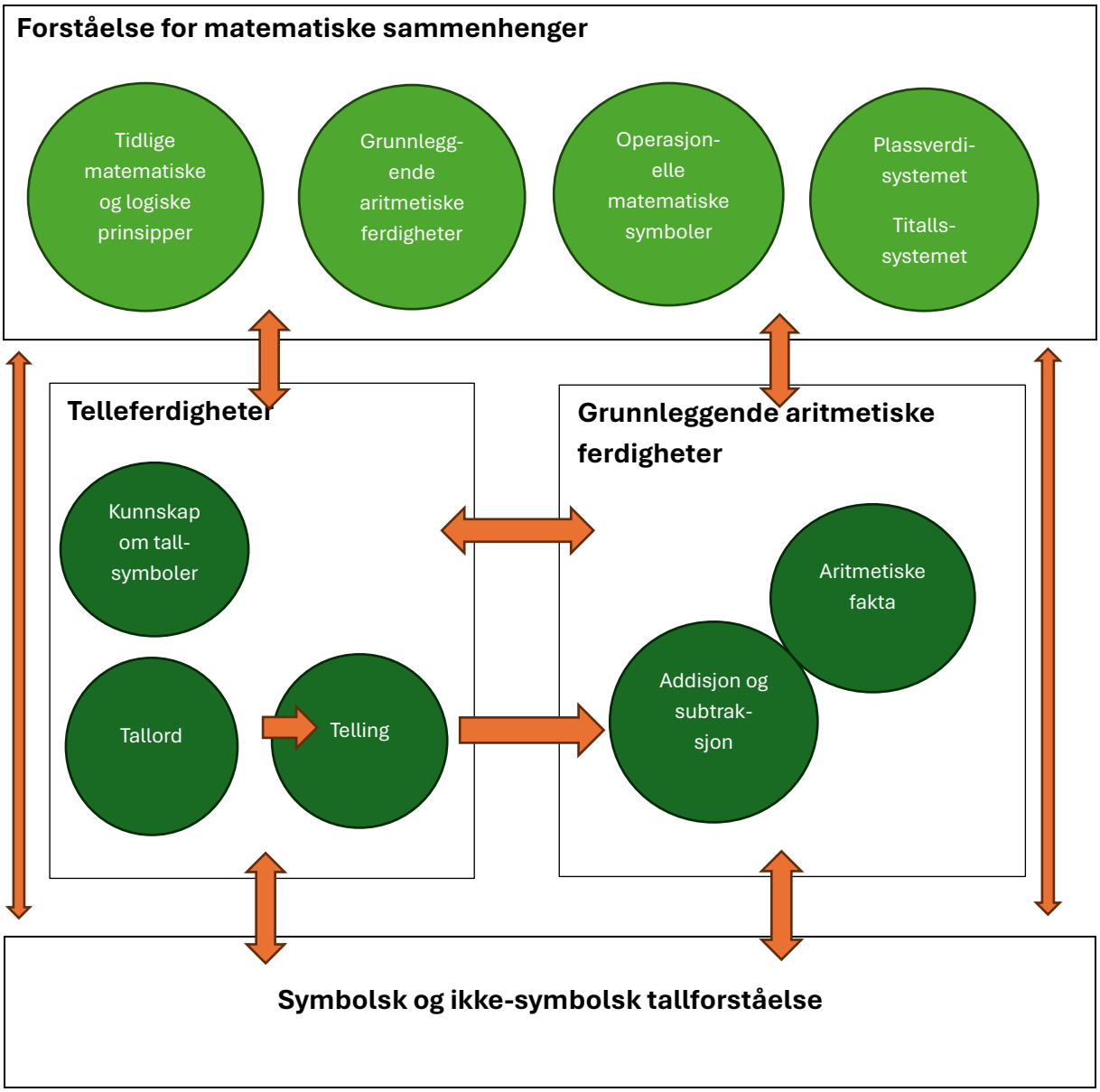
Generell utvikling av matematiske ferdigheter

Målet: Eleven kan resonnere og bruke matematiske begreper, fremgangsmåter, fakta og verktøy for å løse problemer og for å beskrive, forklare og forutse hva som skjer!

I ethvert klasserom er det en håndfull elever som strever med å lære matematikk. Noen av disse elevene har store og vedvarende vansker med grunnleggende matematiske ferdigheter som tallforståelse og aritmetikk (de fire regneartene).

Matematikkferdigheter kan ses på som et sammenvevd system av et sett ferdigheter og funksjoner som gjensidig er avhengig av hverandre og henger sammen i en hierarkisk oppbygging. Dette innebærer å lære seg konsepter og ferdigheter som danner grunnlag for å kunne mestre mer komplekse ferdigheter og regneoperasjoner. Hvis en har svekkelse på et av områdene vil dette kunne påvirke andre områder av utviklingen. Det er derfor viktig å kunne jobbe spesifikt med områder eleven viser vansker innen.

Det finnes ulike teorier om hvordan matematikk utvikler seg og hvilke faktorer som kan forklare matematikkvansker. Modellen nedenfor er utformet på bakgrunn av funn fra longitudinelle studier som tar for seg de ulike ferdighetsområdene fra tidlig alder (5-8 års alder). Den gjør rede for før-matematiske og aritmetiske ferdigheter. Modellen starter med å ta for seg ikke-symbolsk og symbolsk tallforståelse, deretter relasjonelle ferdigheter, telle ferdigheter og til slutt grunnleggende aritmetiske ferdigheter. Matematikkutvikling er avansert og kompleks, og denne modellen belyser ikke alle aspektene. Modellen er ment for å illustrere hvordan de ulike ferdighetene kan bygge på hverandre.



Figur 1: Grunnleggende numeriske ferdigheter for å lære matematikk hos 5-8 åringer – en arbeidsmodell for lærere (Aunio & Räsänen, 2016).

Spesifikke matematikkvansker beskriver den mest alvorlige formen for matematikkvansker (ca. 5 - 7% av barn og ungdom i skolealder). Årsakene handler da om svekket utvikling av mekanismer som trengs for å prosessere og forstå tall. Svak tallforståelse kan anses å være den viktigste faktoren som kan forklare spesifikke matematikkvansker. Dersom årsakene til matematikkvansker kan spores tilbake til faktorer som f.eks. mangelfull opplæring, svak motivasjon, matematikkangst eller svake eksekutive funksjoner (f.eks. arbeidsminne, planleggingsevne, oppmerksomhet og konsentrasjon), kalles denne gruppen **lavtpresterende elever i matematikk** (ca. 10 - 15% av barn og ungdom i skolealder).

Forskning viser at noen **kognitive ferdigheter** (f.eks. eksekutive funksjoner (arbeidsminne, planleggingsevne og kognitiv fleksibilitet), språk), **motivasjon og følelser** (f.eks. interesse, matteangst), i tillegg til elevens **læringsmiljø** (f.eks. skole, sosioøkonomisk status), kan påvirke elevens utvikling av matematiske ferdigheter. Disse har vist seg å være faktorer som kan forklare matematikkvansker, særlig når det gjelder lavtpresterende elever i matematikk.

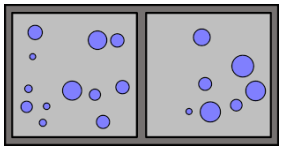
Det er viktig å identifisere elever med svake matematikkferdigheter tidlig, slik at de kan tilbys støtte som kan avhjelpe lærevansker i matematikk. Da trenger lærerne å ha god forståelse og kompetanse om den generelle utviklingen av matematiske ferdigheter. Denne kompetansen kan veilede og guide læreren i å tilpasse og tilrettelegge opplæringen for eleven ut fra det nivået eleven er på.

Videre vil fokuset være på ferdighetsområder som predikerer senere matematikkprestasjoner, og som er kritiske for elever som risikerer å utvikle matematikkvansker. Disse ferdighetsområdene er **tallforståelse, telleferdigheter, aritmetiske ferdigheter og relasjonelle ferdigheter**. Elever med matematikkvansker har ofte ikke utviklet disse ferdighetene fullt ut, og dette får igjen konsekvenser for den videre utviklingen og opplæringen i matematikk.

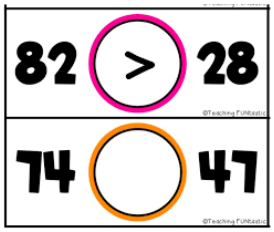
Tallforståelse

Å prosessere mengder og gjenkjenne forskjellen mellom mengdene.

Det er to kategorier:



1. **Ikke-symbolsk tallforståelse**; estimere og prosessere mengder.

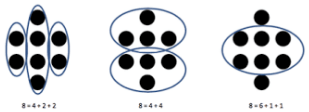


2. **Symbolsk tallforståelse**; prosessering og estimering av tall skrevet som tallsymboler og når man på samme tid forsøker å få oversikt over mengden som representerer det aktuelle tallet.

ANS: The approximate number system er et kognitivt system som støtter estimeringen av mengder (omtrentlig og unøyaktig uten å telle) uavhengig av språk eller symboler. Det er en iboende medfødt, ikke-språklig evne som finnes både hos mennesker og dyr. Hastigheten og nøyaktigheten forbedres gradvis når man gjør oppgaver som måler tallforståelse.

Subitizing: Rask gjenkjenning av mengder i tallområdet 1-4 (nøyaktig og presist anslår små mengder), uten å måtte telle en og en. Dette utvikles før verbal telling, og hastigheten øker med alderen.

Konseptuell subitizing: bruke grupperingen av objekter (1-4) og kombinere dem for å kunne finne ut antall gjenstander i større grupperinger.



Telleferdigheter

Etter hvert som språket utvikles, begynner barn å bruke tallord. I tillegg til tallord og tellbare gjenstander i telling er også kunnskap om og bruk av tallsymboler inkludert i telleferdigheter.

Verbal telling: Tallene produseres som en regle «entotrefire» - de enkelte tallene skilles ikke fra hverandre.

Objekttelling: Å telle et antall gjenstander ved hjelp av verbal telling.

Telleprinsippene:

1. Å si tallordene i riktig rekkefølge
2. Å bruke en indikerende handling (ofte peke med fingeren) for å koble et tallord med et objekt (en-til-en-korrespondanse)
3. Å forstå at objekter kan telles i hvilken som helst rekkefølge, men at hvert enkelt objekt kun kan telles en gang.
4. **Kardinalprinsippet:** Å forstå at det siste angitte tallordet indikerer det totale antall objekter.

Etter hvert lærer barn å telle større mengder muntlig. Deretter:

- telle baklengs fra ti både muntlig og ved å ta bort objekter fra en gruppe
- telle fra et gitt tall, altså fra et annet tall enn tallet en
- angi tall rett etter og rett før et gitt tall
- telle stegvis muntlig (f.eks. 10, 20, 30 ...100)
- telle tallord i begge retninger (forlengs og baklengs)
- bruke verbal telling som strategi i tidlig addisjon og subtraksjon.

Å forstå sammenhengen mellom tallordet («fem»), mengden (*****) og tallsymbolet (5) er en av nøkkelferdighetene man lærer før og i begynnelsen av skolealder.

Aritmetiske ferdigheter

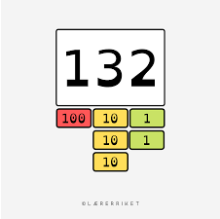
Når man lærer å telle, begynner man også i økende grad å lære aritmetiske ferdigheter; først addisjon og subtraksjon, deretter multiplikasjon og divisjon.

- **Del-del-helhet** ved hjelp av direkte modellering med objekter og «telle alt»- strategier (f.eks. fire epler pluss to til; først muntlig telle fire epler, så telle to epler, og så telle alle seks eplene)
- Deretter vil man bruke en raskere **telle-videre-strategi** (f.eks. starte fra et gitt tall, ikke fra en)
- Så klarer man å **legge til objekter** og **bytte fra ett tall til et annet** (f.eks. telle videre fra tre baller til fem, samtidig som man legger til to baller: («fire, fem») Dette innebærer at man klarer å finne fram til den manglende delen (f.eks. 4 + _ = 6) ved å legge til objekter.
- Neste steg i utviklingen er å forstå **den kommutative loven**; a + b = b + a, og da blir man i stand til å **telle fra det største tallet** (f.eks. i 2 + 9 =, starte å telle fra 9), og med det blir tellingen raskere.
- Videre vil man i subtraksjonsoppgaver med tall som mangler, som 8 - _ = 6, få en forståelse av at subtraksjon er inversjon av addisjon. Man kan da bruke ***«telle opp til»-addisjonsstrategier*** (f.eks. «sju, åtte. Fra seks til åtte er det to steg».)
- I seksårsalderen er den første del-helhet-forståelsen utviklet, og man bruker mer fleksible og sofistikerte strategier når de løser oppgaver i addisjon og subtraksjon.
- Bruken av **avledede kombinasjoner** er mer synlig fra syvårsalder og videre, når man bruker kjente regnefakta for å løse nye aritmetiske oppgaver (f.eks. bruk av dobling, å finne svarene i nærheten av doblinger: 5 + 5 = 10, så 6 + 5 = 11)
- Rundt niårsalderen skal man som regel benytte seg å **gjenhente addisjons- og subtraksjonsfakta direkte fra minnet** i tallområdet 1 – 20, og avvende sin plassverdikunnskap og ulike strategier fleksibelt når man løser addisjons- og subtraksjonsoppgaver med flersifrede tall.
- Å lære addisjons- og multiplikasjonsfakta avhenger mer av memorisering av fakta enn å lære subtraksjons- og divisjonsfakta. Når man løser divisjonsfakta, f.eks. 30: 6, kan man bruke multiplikasjon for å løse oppgaven: «Hvilket tall ganger 6 er lik 30?»

Relasjonelle ferdigheter

Relasjonelle ferdigheter viser til evnen til å forstå ikke-symbolsk og symbolsk relasjon mellom leddene i oppgaver, noe som innebærer en variasjon av ferdigheter; f.eks. matematiske-logiske prinsipper (sammenligning, klassifisering, seriasjon (sortere objekter eller tall i en rekkefølge basert på noen kriterier) og en til en-korrespondanse), forståelse av matematiske symboler, forståelse av aritmetiske prinsipper (f.eks. den kommutative lov i addisjon) og titallssystemet og plassverdisystemet. Noen av disse utvikles før skolestart og predikerer senere matematikkprestasjoner.

- Små barn starter med **å sammenligne objekter** fra omgivelsene og **knytter vokabularet til sammenligningen** (f.eks.: «Det treet er høyere enn dette treet»).
- Deretter gjøres slike **sammenligninger med tall** i ulike hverdagssituasjoner, og de **relaterer dem til matematiske symboler** (f.eks.: «I dag er det – 12 grader ute. I går var det bare – 5 grader. Det er kaldere i dag enn i går).
- Man **klassifiserer objekter på ulike kriterier**. Jo flere kriterier som legges til grunn, desto mer krevende er det for arbeidsminnet, og vanskelighetsgraden på oppgaven øker.
- Etter hvert som man blir kjent med større tall, trenger man å **forstå plassverdisystemet og titallssystemet**.



Regneflyt

Regneflyt er ofte knyttet til spesifikke oppgaver og refererer til trinnene som trengs for å løse regnestykker (Ross et al., 2020). Dette innebærer raskt og nøyaktig utførelse av grunnleggende regneoperasjoner uten tung innsats og uten bruk av tellestrategier ved hoderegning. Elever som er flytende i aritmetikk kan automatisk huske grunnleggende tallfakta og bruke dem til å løse mer komplekse problemer, noe som gjør at de kan utføre beregninger raskt og effektivt (Xu et al., 2022). Flyten i regneferdigheter kan hjelpe eleven med å ta praktiske valg innen problemløsning.

Man anvender ulike strategier i ulike situasjoner for å løse regnestykker (Gilmore et al., 2018). Valg av strategi påvirker matematikkutviklingen videre, og umodne strategier blir etter hvert tunge å anvende og påvirker den aritmetiske flyten. God opplæring innen regnestrategier kan tenkes å øke elevens aritmetiske flyt, men man må huske at eleven må forstå meningen som ligger bak regneoperasjonen, og hvorfor disse strategiene anvendes.

Faktorer som kan forklare matematikkvansker

- Svak tallforståelse, mangelfulle telleferdigheter, svake og/eller mangelfulle aritmetiske- og relasjonelle ferdigheter
- Svake eksekutive funksjoner (arbeidsminne, planleggingsevne og kognitiv fleksibilitet)
- Språkferdigheter
- Motivasjon; elevens egen oppfatning av egen kompetanse («Hvor god er jeg i matematikk?»), interesse («Hvor interessert er jeg i matematikk?») og ulike mål for opplæringen («Jeg har lyst til å bli bedre i matematikk!»).
- Følelser; matematikkangst krever ressurser av de kognitive funksjonene (f.eks. arbeidsminne) som er nødvendig for å løse en matematikkoppgave
- Miljø; sosiøkonomisk bakgrunn, opplæring og læringsmiljø osv.

Kjennetegn på matematikkvansker

Eleven vil antakeligvis streve med tidlige matematiske ferdigheter som f.eks.

- verbal telling
- objekttelling
- telleprinsippene
- estimering av mengder og se hvilken av to ulike mengder som er størst
- sammenligne to ulike tallsymboler og se hvilket tall som er størst
- å forstå tallenes verdi
- subitizing (teller en om gangen i stedet for å gruppere objektene)
- å telle baklengs
- å telle fra et gitt tall (f.eks. å telle videre fra sju til ti)
- å angi tall rett før og rett etter et tall (f.eks. «Hva kommer rett etter åtte?»)
- tallsekvenser (2, 4, 6 ...)
- å lære «en-tallene» («tretten, fjorten ...) og overganger fra f.eks. 99 til 100
- å telle tosifrede tall baklengs (f.eks. 42, 41, 30, 39, 38 ...)
- å automatisere grunnleggende aritmetiske fakta
- titallssystemet
- plassverdisystemet
- å bruke strategier som er effektive, raske og gode

Elever som strever med tidlige matematiske ferdigheter vil generelt sett **bruke umodne strategier i telling** sammenlignet med hva man kan forvente ut fra alderen (f.eks. å ikke kunne fortsette å telle fra et gitt tall, men i stedet starte på én). Ettersom deres

jevnaldrende blir flytende (nøyaktige og raske) når de løser grunnleggende aritmetikkoppgaver, bruker elever med matematikkvansker umodne og trege strategier, som å telle på fingrene som støtte til minnet, og verbal telling. Dermed kan måten de løser aritmetiske oppgaver på, oppleves som **en langsom prosess** som preges av at det gjøres **mange feil**. Disse elevene har **behov for å lære mer avanserte regnestrategier**. Det å **ha god kjennskap til 10-tallssystemet og plassverdisystemet** kan hjelpe dem når de skal bevege seg fra ensifrede utregninger til utregninger med flersifrede tall, og når de senere skal gjøre utregninger med desimaltall.

Kartlegging av matematiske ferdigheter

Når vi kartlegger elever, er det alltid viktig å vurdere formålet med kartleggingen. Ulike måter å kartlegge elever i matematikk på har nødvendigvis ulike formål. Felles for dem alle er at de gir informasjon om hvordan man på best mulig måte kan tilrettelegge for god opplæring. I tillegg til tester som eleven utfører direkte, kan det også være nyttig å vurdere eleven gjennom strukturert observasjon og dynamisk kartlegging.

I Norge har vi to normerte screenere for småskoletrinnet:

1. Den nasjonale kartleggingsprøven i regning (Utdanningsdirektoratet, 2017).
   Formål: identifisere elever under den 20.persentil.
2. Regnefaktaprøven (Klausen & Reikerås, 2016).
   Formål: måle elevers regneflyt innenfor de fire regneartene.

De elevene som skårer under bekymringsgrensen på en screener, bør kartlegges og testes nærmere individuelt. Det bør gjøres for å få et best mulig innblikk i hvor langt eleven har kommet i sin utvikling, og for å få innsikt i nøyaktig hva det er eleven strever med, men også hvilke styrker eleven har. Ved bruk av ikke normerte tester, skal man være varsom med tolkningen av dem fordi man ikke får noe informasjon om hvordan eleven presterer sammenlignet med det som er forventet på elevens alder. Det er også viktig å vurdere kvaliteten av et kartleggingsverktøy og sette seg inn i hvordan det er validert, og i hvilken grad den er reliabel. Validitet handler om at testen måler det den er ment å måle, mens reliabilitet handler om testens presisjon og nøyaktighet (målefeil).

Et utvalg matematikktester:

Navn på test	Kategori	Alder	Hovedinnhold	Normert	Forfattere
Mio	Observasjon	Førskole	Observasjon av tidlige matematiske ferdigheter	Nei	Davidsen. Løge, Lunde. Reikerås & Dalvang (2008)
Nasjonale kartleggings-prøver	Screener	1. - 3. trinn	Telleferdigheter, relasjonelle ferdigheter, aritmetikk	Ja	Utdannings-direktoratet (2017)
Regnefakta-prøven	Screener	2. – 10. trinn	Regneflyt	Ja	Klausen & Reikerås (2016)
Ostads strategi-observasjon	Observasjon	3. – 10. trinn	Observasjon av grunnleggende aritmetiske strategier	Ja	Ostad (2013)
Alle teller	Screener	1. – 10. trinn	Et bredt spekter av matematikk-ferdigheter	Nei	Mcintosh (2012)
Dynamisk kartlegging (Statped)	Individuell, dynamisk	1. – 10. trinn	Grunnleggende ferdigheter i matematikk	Nei	Astrup (2013)

Forskningsbaserte tiltak for elever med matematikkvansker

- Eksplisitte instruksjoner – læreren modellerer en strategi (f.eks. regnestrategi eller en prosedyre) steg for steg for elevene (f.eks. hvordan modellere en strategi for addisjonsstykker som er større enn 10; f.eks. 8 + 4 Forbringer og Fuchs, (2014)
- Bruk av visuelle representasjoner (konkreter) – sekvensen av konkret (fysiske representasjoner) – semikonkret (bilder, tegninger) – abstrakt (tall og symboler) Forbringer og Fuchs, (2014)
- Digitale læremidler – et supplerende tilleggsverktøy. (F.eks. Number Race, Tall i farta, Vektor)
- Smågruppebaserte intervensjonsprogrammer (f.eks. ThinkMath)
- Tilstrekkelige muligheter til å øve, samt tett oppfølging i opplæringen
- Bruke flere ulike arenaer, tilnærminger og metoder i opplæringen, samt knytte matematiske oppgaver til elevens hverdag og praksis.
- Gi elever mestringsopplevelser gjennom åpne oppgaver og tilpassede oppgaver.

Det er viktig å følge med på elevens læringsutbytte for å se hvorvidt de valgte metodene eller verktøyene gir effekt for den enkelte eleven. Én metode fungerer ikke nødvendigvis for alle elever, og man blir nødt til å tilpasse.

Kilder

Aunio, P., & Räsänen, P. (2016). Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years–A working model for educators. European Early Childhood Education Research Journal, 24(5), 684-704.

https://doi-org.ezproxy.uio.no/10.1080/1350293X.2014.996424

Gilmore, C., Göbel, S. M., & Inglis, M. (2018). An Introduction to Mathematical Cognition. Routledge

Mononen, R., & Lopez-Pedersen, A. (2019). Matematikkvansker. I Befring, E., Næss, K. A., & Tangen, R. (Red.) Spesialpedagogikk. Cappelen Akademiske Forlag

Ross, W., Vallée-Tourangeau, F., & Van Herwegen, J. (2020). Mental Arithmetic and Interactivity: the Effect of Manipulating External Number Representations on Older Children's Mental Arithmetic Success. International Journal of Science and Mathematics Education, 18(5), 985–1000.

https://doi.org/10.1007/s10763-019-09978-z

Xu, W., Geng, F., & Wang, L. (2022). Relations of computational thinking to reasoning ability and creative thinking in young children: Mediating role of arithmetic fluency. Thinking Skills and Creativity, 44.

https://doi.org/10.1016/j.tsc.2022.101041